УДК 519.8

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ВОЗМОЖНОСТНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОЖИДАЕМОГО ЗНАЧЕНИЯ T_W-СУММЫ НЕЧЕТКИХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН[1]

Егорова Ю.Е., Язенин А.В.
Кафедра информационных технологий

Поступила в редакцию 22.05.2014, после переработки 09.06.2014.

В предлагаемой статье получены оценки параметров возможностного распределения взвешенной суммы нечетких случайных величин для случаев показательного и нормального распределений случайных факторов.

Ключевые слова: нечеткая случайная величина, слабейшая t-норма, ожидаемое значение нечеткой случайной величины, T_W-сумма нечетких случайных величин.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2014. № 2. С. 81–93.

1. Введение

В работах [1, 5] для случая равномерного распределения случайных факторов получены формулы для расчета коэффициентов нечеткости возможностного распределения ожидаемого значения взвешенной суммы нечетких случайных величин, в которой взаимодействие нечетких факторов описывается слабейшей t-нормой. В данной работе мы продолжаем эти исследования. Нами получены формулы для расчета коэффициентов нечеткости для показательного и нормального распределений, что позволяет идентифицировать возможностное распределение ожидаемого значения T_W-суммы нечетких случайных величин.

2. Необходимые понятия и обозначения

В контексте работ [1, 5–7, 12, 14] введем ряд определений и понятий из теории возможностей. Пусть $(\Gamma, P(\Gamma), \pi)$ и (Ω, B, P) есть возможностное и вероятностное пространства, Γ — произвольное множество с элементами $\gamma \in \Gamma$, $P(\Gamma)$ — множество всех подмножеств Γ, E^1 — числовая прямая.

Дадим определение нечеткой случайной (возможностно-вероятностной) величины и ее распределения.

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект №13-01-00277_а) и частично при поддержке Министерства образования и науки РФ (проект №680).

Определение 1. *Нечеткая случайная величина Y есть вещественная функция $Y : \Omega \times \Gamma \to E^1$, являющаяся P-измеримой для каждого фиксированного γ, а функция*

$$\mu_Y(\omega, t) = \pi \{\gamma \in \Gamma : Y(\omega, \gamma) = t\}$$

называется ее функцией распределения.

Определение 2. *Пусть $Y(\omega, \gamma)$ — нечеткая случайная величина. Ее ожидаемым значением $\mathcal{E}Y$ называется возможностная величина, имеющая функцию распределения*

$$\mu_{\mathcal{E}Y}(t) = \pi \{\gamma \in \Gamma : \mathcal{E}\{Y(\omega, \gamma)\} = t\},$$

где $\mathcal{E}$ — оператор взятия математического ожидания.

Определение 3. *Ковариация нечетких случайных величин X и Y определяется следующим образом*

$$cov(X, Y) = \frac{1}{2}\int_0^1 (cov(X_\omega^-(\alpha), Y_\omega^-(\alpha)) + cov(X_\omega^+(\alpha), Y_\omega^+(\alpha)))d\alpha,$$

где $X_\omega^\pm(\alpha), Y_\omega^\pm(\alpha)$ есть случайные величины, представляющие левую и правую границы α-уровневых множеств соответствующих нечетких величин.

Используя определение (3), дадим определение дисперсии нечеткой случайной величины Y:

$$DY = cov(Y, Y).$$

Следуя [7] дадим определение взаимной t-связанности нечетких величин относительно произвольной t-нормы, описывающей их взаимодействие.

Определение 4. *Возможностные величины $A_1, \ldots, A_n$ называются взаимно T-связанными, если для любого индексного множества $\{i_1, \ldots i_k\} \subset \{1, \ldots, n\}$, $1 \leqslant k \leqslant n$ справедливо*

$$\mu_{A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}) = \pi \{\gamma \in \Gamma | A_{i_1}(\gamma) = x_{i_1}, \ldots, A_{i_k}(\gamma) = x_{i_k}\} =$$
$$= \pi \left\{A_{i_1}^{-1}\{x_{i_1}\} \cap \cdots \cap A_{i_k}^{-1}\{x_{i_k}\}\right\} = T(\pi(A_{i_1}^{-1}\{x_{i_1}\}), \ldots, \pi(A_{i_k}^{-1}\{x_{i_k}\})),$$
$$x_{i_j} \in E^1.$$

В нашем исследовании мы будем использовать сдвиг-масштабное представление нечеткой случайной величины [3]

$$Y(\omega, \gamma) = a(\omega) + \sigma(\omega) \cdot Z(\gamma),$$

где $a(\omega), d(\omega)$ — случайные величины, определенные на вероятностном пространстве (Ω, B, P), имеющие конечные моменты второго порядка, а $Z(\gamma)$ — нечеткая величина, определенная на возможностном пространстве $(\Gamma, P(\Gamma), \pi)$.

Нетрудно видеть, что

$$\mathcal{E}Y = a_0 + \sigma_0 Z(\gamma) \text{ и } \mu_{\mathcal{E}Y}(t) = \mu_Z((t - a_0)/\sigma_0),$$

где

$$a_0 = \mathcal{E}(a), \; \sigma_0 = \mathcal{E}(\sigma).$$

Определение 5. *Т-суммой нечетких случайных величин называется взвешенная сумма нечетких случайных величин, в сдвиг-масштабном представлении которых возможностные величины являются взаимно Т-связанными.*

3. Идентификация параметров ожидаемого значения Т-суммы нечетких случайных величин при слабейшей t-норме

Рассмотрим решение задачи идентификации для случая слабейшей t-нормы, описывающей взаимодействие нечетких параметров

$$T_W(x,y)=\begin{cases}\min\{x,y\}, & \max\{x,y\}=1,\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases}$$

Обозначим Т-сумму при слабейшей t-норме через

$$f_{T_W}(x,\omega,\gamma)=\sum_{j=1}^{n}A_j(\omega,\gamma)x_j,$$

где $A_j(\omega,\gamma)$ есть нечеткие случайные величины.

Пусть $A_j(\omega,\gamma)$ имеют сдвиг-масштабное представление

$$A_j(\omega,\gamma)=c_j(\omega)+d_j(\omega)Z_j(\gamma).$$

В этом представлении $c_j(\omega)$, $d_j(\omega)$ — случайные величины, определенные на вероятностном пространстве (Ω,B,P), $Z_j(\gamma)=(\underline{a_j},\overline{a_j},\underline{b_j},\overline{b_j})_{LR}$ — взаимно T_W-связанные нечеткие интервалы. Для любого j функции представления формы L,R являются идентичными.

Тогда имеет место следующий результат

$$f_{T_W}(x,\omega,\gamma)=\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\underline{a}_j d_j(\omega)+c_j(\omega)\right)x_j,\ \sum_{j=1}^{n}\left(\overline{a}_j d_j(\omega)+c_j(\omega)\right)x_j,\right.$$
$$\left.\max_{j=1}^{n}\underline{b}_j d_j(\omega)x_j,\ \max_{j=1}^{n}\overline{b}_j d_j(\omega)x_j\right)_{LR}. \quad (1)$$

В работе [5] был исследован случай равномерно распределенных на отрезке $[0,1]$ случайных компонент. Рассмотрим другие распределения.

3.1 Показательное распределение случайных факторов

Пусть $X_1,\dots,X_n$ – независимые случайные величины, имеющие показательное распределение с параметрами $\lambda_1,\dots,\lambda_n$.

Заметим, что если случайная величина X имеет показательное распределение с параметром λ, то случайная величина aX также имеет показательное распределение с параметром $\frac{\lambda}{a}$.

Рассмотрим величину $Y=\max\{X_1,\dots,X_n\}$. В [1] показано, что

$$f_Y(x)=\sum_{i=1}^{n}f_{X_i}(x)\prod_{j\neq i}F_{X_i}(x), \quad (2)$$

поэтому функция плотности распределения случайной величины Y будет иметь следующий вид

$$f_Y(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e^{-\lambda_i x} \prod_{j\neq i} \left(1 - e^{-\lambda_j x}\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e^{-\lambda_i x} \Bigg(1 - \sum_{j\neq i} e^{-\lambda_j x} + \sum_{j_1<j_2; j_1, j_2\neq i} e^{-x(\lambda_{j_1}+\lambda_{j_2})} - \cdots +$$
$$+ (-1)^{n+1} e^{-x\sum_{j\neq i}\lambda_j}\Bigg) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \Bigg(\lambda_i e^{-\lambda_i x} - \lambda_i \sum_{j\neq i} e^{-x(\lambda_i+\lambda_j)} + \sum_{j_1<j_2; j_1, j_2\neq i} e^{-x(\lambda_i+\lambda_{j_1}+\lambda_{j_2})} - \cdots +$$
$$+ (-1)^{n+1} e^{-x\sum_{j=1}^{n}\lambda_j}\Bigg).$$

Утверждение 1. Математическое ожидание случайной величины Y имеет вид

$$\mathcal{E}Y = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} - \sum_{j_1<j_2} \frac{1}{\lambda_{j_1}+\lambda_{j_2}} + \sum_{j_1<j_2<j_3} \frac{1}{\lambda_{j_1}+\lambda_{j_2}+\lambda_{j_3}} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{\sum_{j=1}^{n}\lambda_j}.$$

Доказательство. Так как

$$\mathcal{E}Y = \int_0^\infty x f_Y(x)\, dx,$$

то

$$\mathcal{E}Y = \int_0^\infty x \sum_{i=1}^{n} \Bigg(\lambda_i e^{-\lambda_i x} - \lambda_i \sum_{j\neq i} e^{-x(\lambda_i+\lambda_j)} +$$
$$+ \sum_{j_1<j_2, j_1, j_2\neq i} e^{-x(\lambda_i+\lambda_{j_1}+\lambda_{j_2})} - \cdots + (-1)^{n+1} e^{-x\sum_{j=1}^{n}\lambda_j}\Bigg) dx =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \Bigg(\lambda_i \int_0^\infty x e^{-\lambda_i x}\, dx - \lambda_i \sum_{j\neq i} \int_0^\infty x e^{-x(\lambda_i+\lambda_j)} +$$
$$\sum_{j_1<j_2, j_1, j_2\neq i} \int_0^\infty x e^{-x(\lambda_i+\lambda_{j_1}+\lambda_{j_2})} - \cdots + (-1)^{n+1} \int_0^\infty x e^{-x\sum_{j=1}^{n}\lambda_j}\Bigg) dx.$$

Но

$$\int_0^\infty x e^{-\lambda x}\, dx = \frac{1}{\lambda^2},$$

поэтому

$$\mathcal{E}Y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\frac{1}{\lambda_i^2} - \sum_{j \neq i} \frac{1}{(\lambda_i + \lambda_j)^2} + \sum_{j_1 < j_2, j_1, j_2 \neq i} \frac{1}{(\lambda_i + \lambda_{j_1} + \lambda_{j_2})^2} - \cdots + \right.$$
$$\left. + (-1)^{n+1} \frac{1}{(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j)^2} \right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} - \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_i \sum_{j \neq i} \frac{1}{(\lambda_i + \lambda_j)^2} \right) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_i \sum_{j_1 < j_2, j_1, j_2 \neq i} \frac{1}{(\lambda_i + \lambda_{j_1} + \lambda_{j_2})^2} \right) - \cdots + (-1)^{n+1} \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j)^2}.$$

В итоге получаем

$$\mathcal{E}Y = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} - \sum_{j_1 < j_2} \frac{1}{\lambda_{j_1} + \lambda_{j_2}} + \sum_{j_1 < j_2 < j_3} \frac{1}{\lambda_{j_1} + \lambda_{j_2} + \lambda_{j_3}} \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j}.$$

□

Пример 1. Пусть X_1, X_2, X_3 — независимые случайные величины, имеющие показательное распределение с параметрами $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, соответственно. Вычислим математическое ожидание случайной величины $Y = \max\{a_1 X_1, a_2 X_2, a_3 X_3\}$. Согласно утверждению 1 математическое ожидание случайной величины Y имеет вид

$$\mathcal{E}Y = \frac{a_1}{\lambda_1} + \frac{a_2}{\lambda_2} + \frac{a_3}{\lambda_3} - \frac{a_1 a_2}{\lambda_1 a_2 + \lambda_2 a_3} - \frac{a_1 a_3}{\lambda_1 a_3 + \lambda_3 a_1} -$$
$$- \frac{a_2 a_3}{\lambda_2 a_3 + \lambda_3 a_2} + \frac{a_1 a_2 a_3}{\lambda_1 a_2 a_3 + \lambda_2 a_1 a_3 + \lambda_3 a_1 a_2}.$$

Утверждение 2. Пусть случайные величины $d_j(\omega), c_j(\omega),\ \forall j = \overline{1, n}$ независимы и имеют показательное распределение с параметрами λ_j и κ_j. Тогда

$$\mathcal{E}\left\{ f_{T_w}(x, \omega, \gamma) \right\} = (\varphi(x), \psi(x), \eta(x), \theta(x))_{LR},$$

где

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\frac{a_j}{\lambda_j} + \frac{1}{\kappa_j}\right),$$

$$\psi(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\frac{b_j}{\lambda_j} + \frac{1}{\kappa_j}\right),$$

$$\eta(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i x_i}{\lambda_i} - \sum_{j_1 < j_2} \frac{\alpha_{j_1} \alpha_{j_2} x_{j_1} x_{j_2}}{\lambda_{j_1} \alpha_{j_2} x_{j_2} + \lambda_{j_2} \alpha_{j_1} x_{j_1}} +$$
$$+ \cdots + (-1)^{n+1} \frac{\prod_{j=1}^{n} \alpha_j x_j}{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \prod_{k \neq j}^{n} \alpha_k x_k},$$

$$\theta(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i x_i}{\lambda_i} - \sum_{j_1<j_2} \frac{\beta_{j_1}\beta_{j_2}x_{j_1}x_{j_2}}{\lambda_{j_1}\beta_{j_2}x_{j_2} + \lambda_{j_2}\beta_{j_1}x_{j_1}} + \\ + \dots + (-1)^{n+1} \frac{\prod_{j=1}^{n} \beta_j x_j}{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \prod_{k\neq j}^{n} \beta_k x_k}.$$

3.2 Нормальное распределение случайных факторов

Заметим, что если случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами (μ, σ), то случайная величина aX имеет нормальное распределение с параметрами $(a\mu, a\sigma)$, поэтому случай $\max\{a_1X_1, \dots, a_nX_n\}$ является частным случаем $\max\{X_1, \dots, X_n\}$ для нормально распределенных случайных величин $X_i,\ i = 1, \dots, n$.

Рассмотрим величину $Y = \max\{X_1, \dots, X_n\}$, где $X_1, \dots, X_n$ — независимые случайные величины, имеющие нормальное распределение с параметрами $(\mu_1, \sigma_1), \dots, (\mu_n, \sigma_n)$, то есть

$$f_{X_i}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} e^{-\frac{(x-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}}, \qquad F_{X_i}(x) = \frac{1}{2} + erf\Big(\frac{x-\mu_i}{\sigma_i}\Big).$$

Тогда функция плотности распределения случайной величины Y будет иметь вид

$$f_Y(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i(x)}{F_i(x)} \prod_{i=1}^{n} F_i(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \prod_{j\in J_i}^{n} F_j(x),$$

где $J_i = \{j \neq i \mid j = 1, \dots, n\},\ i = 1,\ \dots, n$.

Вычислим произведение функций распределения

$$\prod_{j\in J_i} F_j(x) = \prod_{j\in J_i} \left(\frac{1}{2} + erf(\frac{x-\mu_i}{\sigma_i})\right) = \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-2}} \sum_{j\in J_i} erf(\frac{x-\mu_j}{\sigma_j}) + \\ + \frac{1}{2^{n-3}} \sum_{j_1<j_2\in J_i} erf(\frac{x-\mu_{j_1}}{\sigma_{j_1}}) erf(\frac{x-\mu_{j_2}}{\sigma_{j_2}}) + \\ + \dots + \prod_{j\in J_i} erf(\frac{x-\mu_j}{\sigma_j}). \quad (3)$$

Воспользуемся следующим представлением функции Лапласа $erf(x)$

$$erf(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)}, \quad (4)$$

а также

$$erf(\frac{x-\mu_i}{\sigma_i}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!(2n+1)} \left(\frac{x-\mu_i}{\sigma_i}\right)^{2n+1}. \quad (5)$$

Так как в формуле (3) фигурируют произведения функций Лапласа, то выведем формулы, представляющие эти произведения в общем случае

$$\prod_{j=1}^{s} erf(\frac{x-\mu_j}{\sigma_j}) = \prod_{j=1}^{s} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k k!(2k+1)} \left(\frac{x-\mu_j}{\sigma_j}\right)^{2k+1} =$$
$$= \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^s \prod_{j=1}^{s} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k k!(2k+1)} \left(\frac{x-\mu_j}{\sigma_j}\right)^{2k+1} =$$
$$= \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^s \sum_{k_1,\dots,k_s=0}^{\infty} \prod_{j=1}^{s} \frac{(-1)^{k_j}}{2^{k_j} k_j!(2k_j+1)} \left(\frac{x-\mu_j}{\sigma_j}\right)^{2k_j+1} =$$
$$= \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^s \sum_{k_1,\dots,k_s=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{\sum_{j=1}^{s} k_j} \prod_{j=1}^{s} \frac{1}{k_j!(2k_j+1)\sigma_j^{2k_j+1}} \prod_{j=1}^{s} (x-\mu_j)^{2k_j+1}.$$

Учитывая, что

$$\prod_{j=1}^{s} (x-\mu_j)^{2k_j+1} = \prod_{j=1}^{s} \sum_{l=0}^{2k_j+1} (-1)^{2k_j+1-l} C_{2k_j+1}^{l} \mu_j^{2k_j+1-l} x^l =$$
$$= \sum_{l_1=1}^{2k_1+1} \cdots \sum_{l_s=1}^{2k_s+1} \prod_{j=1}^{s} (-1)^{2k_j+1-l_j} C_{2k_j+1}^{l} \mu_j^{2k_j+1-l_j} x^{l_j},$$

в итоге получаем

$$f_Y(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \prod_{j\in J_i} F_j(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i} e^{-\frac{(x-\mu_i)^2}{\sigma_i^2}} \left(\frac{1}{2^{n-1}} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2^{n-2}} \sum_{j\in J_i} G_j^i(x) + \frac{1}{2^{n-3}} \sum_{j_1<j_2\in J_i} G_{j_1 j_2}^i(x) + \dots + \prod_{j\in J_i}^{n} G_{J_i}^i(x)) \right), \quad (6)$$

где

$$G_{j_1,\dots,j_s}^i(x) = \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^s \sum_{k_1,\dots,k_s=0}^{\infty} \prod_{j=1}^{s} \left(-\frac{1}{2}\right)^{\sum_{j=1}^{s} k_j} \prod_{j=1}^{s} \frac{1}{k_j!(2k_j+1)\sigma_j^{2k_j+1}}$$
$$\sum_{l_1=1}^{2k_1+1} \cdots \sum_{l_s=1}^{2k_s+1} x^{\sum_{j=1}^{s} l_j} \prod_{j=1}^{s} (-1)^{2k_j+1-l_j} C_{2k_j+1}^{l_j} \mu_j^{2k_j+1-l_j}. \quad (7)$$

Утверждение 3. Математическое ожидание случайной величины Y имеет вид

$$\mathcal{E}Y = \sum_{i=1}^{n} (\frac{1}{2^{i-1}} \mu_i + \frac{1}{2^{i-2}} \sum_{j\in J_i} g_j^i + \frac{1}{2^{i-3}} \sum_{j_1<j_2\in J_i} g_{j_1,j_2}^i + \dots + g_{j_1,\dots,j_{n-1}}^i),$$

где

$$g^i_{j_1,\ldots,j_s} = \sqrt(\pi) e^{\frac{1}{2\sigma_i^2}} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^s \sum_{k_1,\ldots,k_s=0}^{\infty} \sum_{l_1=1}^{2k_1+1} \cdots \sum_{l_s=1}^{2k_s+1} \sum_{t=0}^{\frac{1+\sum_{j=1}^s}{2}}$$

$$\frac{(1+\sum_{j=1}^s l_j)!\mu_i^{1-2t+\sum_{j=1}^s}}{t!(1-2t+\sum_{j=1}^s l_j)!2^{2t}} \prod_{j=1}^s \frac{(-1)^{3k_j-l_j+1} C^{l_j}_{2k_j+1} \mu_j^{2k_j-l_j+1}}{k_j!(2k_j+1)\sigma_j^{2k_j+1} 2^{k_j}}.$$

Доказательство. Так как

$$\mathcal{E}Y = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f_Y(x)\, dx,$$

то

$$\mathcal{E}Y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i} e^{-\frac{(x-\mu_i)^2}{\sigma_i^2}} \left(\frac{1}{2^{i-1}} + \frac{1}{2^{i-2}} \sum_{j\in J_i} G^i_j(x) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2^{i-3}} \sum_{j_1<j_2\in J_i} G^i_{j_1 j_2}(x) + \cdots + G^i_{J_i}(x)) \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i} \left(\frac{1}{2^{i-1}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{(x-\mu_i)^2}{\sigma_i^2}}\, dx + \frac{1}{2^{i-2}} \sum_{j\in J_i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{(x-\mu_i)^2}{\sigma_i^2}} G^i_j(x)\, dx + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2^{i-3}} \sum_{j_1<j_2\in J_i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{(x-\mu_i)^2}{\sigma_i^2}} G^i_{j_1 j_2}(x)\, dx + \cdots + \int\limits_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{(x-\mu_i)^2}{\sigma_i^2}} G^i_{J_i}(x))\, dx \right).$$

Вычислим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{(x-\mu_i)^2}{\sigma_i^2}} G^i_{j_1,\ldots,j_s}(x))\, dx =$$

$$= \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^s \sum_{k_1,\ldots,k_s=0}^{\infty} \prod_{j=1}^s \left(-\frac{1}{2}\right)^{\sum_{j=1}^s k_j} \prod_{j=1}^s \frac{1}{k_j!(2k_j+1)\sigma_j^{2k_j+1}}$$

$$\sum_{l_1=1}^{2k_1+1} \cdots \sum_{l_s=1}^{2k_s+1} \prod_{j=1}^s (-1)^{2k_j+1-l_j} C^{l_j}_{2k_j+1} \mu_j^{2k_j+1-l_j} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^{1+\sum_{j=1}^s l_j} e^{-\frac{(x-\mu_i)^2}{\sigma_i^2}}\, dx.$$

Учитывая [2], что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-\frac{(x-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}}\, dx = e^{\frac{1}{2\sigma_i^2}} \frac{n!\sqrt{\pi}}{2^n} \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(2\mu_i)^{n-2k}}{(n-2k)!k!},$$

получим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{(x-\mu_i)^2}{\sigma_i^2}} G^i_{j_1,\ldots,j_s}(x))\,dx =$$

$$= \sqrt(\pi) e^{\frac{1}{2\sigma_i^2}} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^s \sum_{k_1,\ldots,k_s=0}^{\infty} \sum_{l_1=1}^{2k_1+1} \cdots \sum_{l_s=1}^{2k_s+1} \sum_{t=0}^{\frac{1+\sum_{j=1}^s}{2}} \frac{(1+\sum_{j=1}^s l_j)!\mu_i^{1-2t+\sum_{j=1}^s}}{t!(1-2t+\sum_{j=1}^s l_j)!2^{2t}} \prod_{j=1}^s \frac{(-1)^{3k_j-l_j+1} C^{l_j}_{2k_j+1} \mu_j^{2k_j-l_j+1}}{k_j!(2k_j+1)\sigma_j^{2k_j+1} 2^{k_j}}.$$

В итоге математическое ожидание случайной величины Y имеет вид

$$\mathcal{E}Y = \sum_{i=1}^n \Big(\frac{1}{2^{i-1}}\mu_i + \frac{1}{2^{i-2}}\sum_{j\in J_i} g^i_j + \frac{1}{2^{i-3}}\sum_{j_1<j_2\in J_i} g^i_{j_1,j_2} + \cdots + g^i_{j_1,\ldots,j_{n-1}}\Big)$$

где

$$g^i_{j_1,\ldots,j_s} = \sqrt{\pi} e^{\frac{1}{2\sigma_i^2}} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^s \sum_{k_1,\ldots,k_s=0}^{\infty} \sum_{l_1=1}^{2k_1+1} \cdots \sum_{l_s=1}^{2k_s+1} \sum_{t=0}^{\frac{1+\sum_{j=1}^s l_j}{2}} \frac{(1+\sum_{j=1}^s l_j)!\mu_i^{1-2t+\sum_{j=1}^s l_j}}{t!(1-2t+\sum_{j=1}^s l_j)!2^{2t}} \prod_{j=1}^s \frac{(-1)^{3k_j-l_j+1} C^{l_j}_{2k_j+1} \mu_j^{2k_j-l_j+1}}{k_j!(2k_j+1)\sigma_j^{2k_j+1} 2^{k_j}}.$$

□

Пример 2. Пусть X_1, X_2 – независимые случайные величины, имеющие нормальное распределение с параметрами $(\mu_1,\sigma_1),(\mu_2,\sigma_2)$, соответственно. Получим формулу для математического ожидания случайной величины $Y = \max\{a_1X_1, a_2X_2\}$. Согласно утверждению 3 математическое ожидание случайной величины Y имеет вид

$$\mathcal{E}Y = \frac{1}{2}a_1\mu_1 + \frac{1}{2}a_2\mu_2 + g^1_2 + g^2_1,$$

где

$$g^i_j = \sqrt{2} e^{\frac{1}{2\sigma_i^2}} \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{2k+1}\sum_{t=0}^{\frac{1+l}{2}} \frac{(-1)^{3k-l+1} C^l_{2k+1}(1+l)!\mu_i^{1-2t+l}\mu_j^{2k-l+1}}{t!k!(1-2t+l)!(2k+1)\sigma_j^{2k+1}2^{k+2t}}.$$

Утверждение 4. Пусть случайные величины $d_j(\omega), c_j(\omega)$, $\forall j = \overline{1,n}$ независимы и имеют нормальное распределение с параметрами (μ_j,σ_j) и (κ_j,δ_j). Тогда (1) примет вид

$$\mathcal{E}\left\{f_{T_w}(x,\omega,\gamma)\right\} = (\varphi(x),\psi(x),\eta(x),\theta(x))_{LR},$$

где

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^n x_j(a_j\mu_j+\kappa_j), \qquad \psi(x) = \sum_{j=1}^n x_j(b_j\mu_j+\kappa_j),$$

$$\eta(x) = \sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{1}{2^{i-1}}\mu_i + \frac{1}{2^{i-2}}\sum_{j\in J_i} g_j^i(x,\underline{b}) + \\ + \frac{1}{2^{i-3}}\sum_{j_1<j_2\in J_i} g^i_{j_1,j_2}(x,\underline{b}) + \cdots + g^i_{j_1,\ldots,j_{n-1}}(x,\underline{b})\Big),$$

$$\theta(x) = \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{1}{2^{i-1}}\mu_i + \frac{1}{2^{i-2}}\sum_{j\in J_i} g_j^i(x,\bar{b}) + \\ + \frac{1}{2^{i-3}}\sum_{j_1<j_2\in J_i} g^i_{j_1,j_2}(x,\bar{b}) + \cdots + g^i_{j_1,\ldots,j_{n-1}}(x,\bar{b})\Big),$$

а

$$g^i_{j_1,\ldots,j_s}(x,b) = \sqrt{\pi}e^{\frac{1}{2\sigma_i^2}}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^s \times \\ \times \sum_{k_1,\ldots,k_s=0}^{\infty}\sum_{l_1=1}^{2k_1+1}\cdots\sum_{l_s=1}^{2k_s+1}\sum_{t=0}^{\frac{1+\sum_{j=1}^s l_j}{2}} \frac{(1+\sum_{j=1}^s l_j)!(b_i\mu_i x_i)^{1-2t+\sum_{j=1}^s l_j}}{t!(1-2t+\sum_{j=1}^s l_j)!2^{2t}} \times \\ \times \prod_{j=1}^{s}\frac{(-1)^{3k_j-l_j+1}C^{l_j}_{2k_j+1}(b_j\mu_j x_j)^{2k_j-l_j+1}}{k_j!(2k_j+1)(b_j\sigma_j x_j)^{2k_j+1}2^{k_j}}.$$

Заключение

В работе получены формулы для расчета коэффициентов нечеткости ожидаемого значения взвешенной суммы T_W-связанных нечетких величин для нормального и показательного распределений. Как видно из результатов статьи, определение коэффициентов нечеткости, является трудной задачей, решаемой для простых распределений. Дальнейшее развитие этой работы может быть связанно с исследованием свойств полученных функций, оценок параметров нечеткости, что очень важно для решения задач оптимизации и принятия решений в условиях гибридной неопределенности [4, 5, 8, 13].

Список литературы

[1] Гордеев Р.Н., Язенин А.В. Возможностное распределение ожидаемого значения T_W-суммы нечетких случайных величин // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2012. № 1(24). С. 85–96.

[2] Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений (4-е издание). М.: Наука, 1963. 1100 с.

[3] Хохлов М.Ю., Язенин А.В. Расчет числовых характеристик нечетких случайных величин // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2003. № 1. С. 39–43.

[4] Язенин А.В. О возможностно-вероятностной оптимизации // Нечеткие системы и мягкие вычисления. 2007. Т. 2, № 1. С. 53–72.

[5] Язенин А.В., Егорова Ю.Е. О методах решения задач возможностно-вероятностного программирования // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2013. № 4(31). С. 85–103.

[6] Feng Y., Hu L., Shu H. The variance and covariance of fuzzy random variables and their applications // Fuzzy Sets and Systems. 2001. Vol. 120, № 3. Pp. 487–497.

[7] Hong D.H. Parameter estimations of mutually T-related fuzzy variables // Fuzzy Sets and Systems. 2001. Vol. 123, № 1. Pp. 63–71.

[8] Luhandjula M.K. Optimisation under hybrid uncertainty // Fuzzy sets and systems. 2004. Vol. 146, № 2. Pp. 187–203.

[9] Nahmias S. Fuzzy variables // Fuzzy Sets and Systems. 1978. Vol. 1, № 2. Pp. 97–110.

[10] Nahmias S. Fuzzy variables in a random environment // Advances in fuzzy sets theory / Ed. by M.M. Gupta, R.K. Ragade, R.R. Yager. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1979. Pp. 165–168.

[11] Rao M.B., Rashed A. Some comments on fuzzy variables // Fuzzy Sets and Systems. 1981. Vol. 6, № 3. Pp. 285–292.

[12] Yazenin A.V. Fuzzy and stochastic programming // Fuzzy sets and systems. 1987. Vol. 22, № 1-2. Pp. 171–180.

[13] Yazenin A.V. Possibilistic-probabilistic models and methods of portfolio optimization // Studies in Computational Intelligence (SCI). Germany: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007. Vol. 36. Pp. 241–259.

[14] Yazenin A.V., Soldatenko I.S. Possibilistic optimization tasks with mutually T-related parameters: solution methods and comparative analysis // Fuzzy Optimization. Studies in Fuzziness and Soft Computing / Ed. by W. Lodwick, J. Kacprzyk. Germany: Springer Berlin Heidelberg, 2010. Vol. 254. Pp. 163–192.

Библиографическая ссылка

Егорова Ю.Е., Язенин А.В. Идентификация параметров возможностного распределения ожидаемого значения T_W-суммы нечетких случайных величин // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2014. № 2. С. 81–93.

Сведения об авторах

1. **Егорова Юлия Евгеньевна**
аспирант кафедры информационных технологий Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.
E-mail: j.e.egorova@gmail.com

2. **Язенин Александр Васильевич**
декан факультета прикладной математики и кибернетики Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.
E-mail: Alexander.Yazenin@tversu.ru.

PARAMETER IDENTIFICATION FOR POSSIBILISTIC DISTRIBUTION OF EXPECTED VALUES OF FUZZY RANDOM VARIABLES T_W-SUMS

Egorova Yuliya Evgenyevna
Postgraduate student of Information Technology chair
Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TSU.
E-mail: j.e.egorova@gmail.com

Yazenin Aleksander Vasilyevich
Dean of Applied Mathematics and Cybernetics faculty
Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TSU.
E-mail: Alexander.Yazenin@tversu.ru

Received 22.05.2014, revised 09.06.2014.

The paper presents estimated values of possibilistic distirbution parameters of weighted sum of fuzzy random variables for cases when random factors have exponential and normal distributon. Properties of the estimated values were investigated.

Keywords: possibilistic-probabilistic optimization, possibilistic random variable, t-norm, expected value of fuzzy random variable, possibility measure, neccessity measure.

Bibliographic citation

Egorova Yu.E., Yazenin A.V. Parameter identification for possibilistic distribution of expected values of fuzzy random variables T_W-sums. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2014, no. 2, pp. 81–93. (in Russian)